

## 数学试卷

命题学校及命题人:宜昌一中 王健 阳迪龙

审题单位:圆创教育教学研究中心 武汉外国语学校

本试题共4页,22题。满分150分。考试用时120分钟。

考试时间:2023年2月1日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

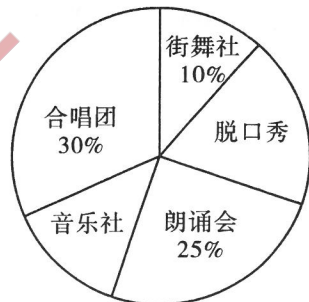
## 注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第I卷(选择题)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 在复平面内,复数  $z$  对应的点为  $(-1, 1)$ , 则  $\frac{z}{1+i} =$ 
  - $-1+i$
  - $-1-i$
  - $i$
  - $1+i$
- 已知集合  $A = \{x | \log_2(x+1) \leq 2\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{x^2-x+2}{x} > 0\right\}$ , 则  $A \cap B =$ 
  - $\{x | 2 < x \leq 3\}$
  - $\{x | x \leq 3\}$
  - $\{x | -1 < x \leq 3\}$
  - $\{x | 0 < x \leq 3\}$
- 下列说法正确的是
  - “ $a \geq b$ ”是“ $am^2 \geq bm^2$ ”的充要条件
  - “ $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ ”是“ $\tan x = 1$ ”的必要不充分条件
  - 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2$ ”的否定形式是“ $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} > 2$ ”
  - “ $xy = 1$ ”是“ $\lg x + \lg y = 0$ ”的充分不必要条件
- 已知  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 则  $\cos \alpha =$ 
  - $\frac{\sqrt{15}}{4}$
  - $\frac{\sqrt{30}}{6}$
  - $\frac{3\sqrt{14}}{14}$
  - $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- 某高中为促进学生的全面发展,秋季学期合唱团、朗诵会、脱口秀、街舞社、音乐社等五个社团面向1200名高一年级同学招新,每名同学依据自己兴趣爱好最多可参加其中一个,各个社团的人数比例的饼状图如图所示,其中参加音乐社社团的同学有15名,参加脱口秀社团的有20名,则
  - 高一年级同学参加街舞社社团的同学有120名
  - 脱口秀社团的人数占这五个社团总人数的20%
  - 高一年级参加这五个社团总人数占全年级人数的12%
  - 高一年级同学参加这五个社团的总人数为200名



6. 已知平面向量  $a, b, c$  满足  $|a| = |b| = a \cdot b = 2$ , 且  $(b-c) \cdot (2b-c) = 0$ , 则  $|a-2c|$  的最大值为

- $\sqrt{7}+2$
- $2\sqrt{7}+1$
- $\sqrt{7}+1$
- $2\sqrt{7}+2$

7. 已知  $O$  为坐标原点,  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 点  $P$  在双曲线的右支上, 若  $\triangle POF_2$  是面积为  $2\sqrt{3}$  的正三角形, 则  $b^2$  的值为

- 2
- 6
- $4\sqrt{3}$
- $8-4\sqrt{3}$

8. 设  $a = \frac{1}{21}$ ,  $b = \ln 1.05$ ,  $c = e^{0.05} - 1$ , 则下列关系正确的是

- $a > b > c$
- $b > a > c$
- $c > b > a$
- $c > a > b$

## 第II卷(非选择题)

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 已知函数  $f(x) = -2\sin^2 x + \sin 2x + 1$ , 则

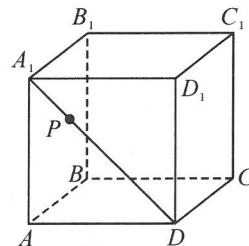
- $f(x)$  的图象可由  $y = \sqrt{2} \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度得到
- $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$  上单调递增
- $f(x)$  在  $[0, \pi]$  内有2个零点
- $f(x)$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  上的最大值为  $\sqrt{2}$

10. 已知  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  是圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  上的两点, 则下列结论中正确的是

- 若  $|AB| = 2\sqrt{3}$ , 则  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$
- 若点  $O$  到直线  $AB$  的距离为  $\sqrt{2}$ , 则  $|AB| = 2\sqrt{2}$
- 若  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ , 则  $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1|$  的最大值为4
- $x_1 x_2 + y_1 y_2$  的最小值为-4

11. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  棱长为2,  $P$  是直线  $A_1D$  上的一个动点, 则下列结论中正确的是

- $BP$  的最小值为  $\sqrt{6}$
- $PA + PC$  的最小值为  $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
- 三棱锥  $B_1-ACP$  的体积不变
- 以点  $B$  为球心,  $\sqrt{2}$  为半径的球面与面  $AB_1C$  的交线长为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$



12. 数列  $\{a_n\}$  各项均为正数, 其前  $n$  项和  $S_n$ , 且满足  $a_n \cdot S_n = 9 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 下列四个结论中正确的是

- $\{a_n\}$  为等比数列
- $\{a_n\}$  为递减数列
- $\{a_n\}$  中存在大于3的项
- $\{a_n\}$  中存在小于  $\frac{1}{2023}$  的项

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 在  $(x+y)^5(1+x)^6$  展开式中, 含  $x^4 y^4$  的项的系数是\_\_\_\_\_。(用数字作答)

14. 过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  焦点  $F$  的射线与抛物线交于点  $A$ , 与准线交于点  $B$ , 若  $|AF| = 2, |BF| = 6$ , 则  $p$  的值为\_\_\_\_\_。

15. 已知正三棱锥的各顶点都在表面积为  $64\pi$  球面上, 正三棱锥体积最大时该正三棱锥的高为\_\_\_\_\_。

16. 设  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 若对  $\forall x \in (-\infty, 0)$  都有  $a^x + a^{\frac{1}{x}} \leq \frac{2}{a}$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

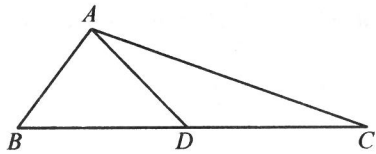


四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $AB=9$ , 点  $D$  在边  $BC$  上,  $AD=7$ .

- (1) 若  $\cos B = \frac{2}{3}$ , 求  $BD$  的值;
- (2) 若  $\cos \angle BAC = -\frac{2}{3}$ , 且点  $D$  是边  $BC$  的中点, 求  $AC$  的值.



18. (12 分)

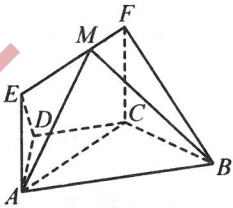
已知正项数列  $\{a_n\}$ , 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$ .

- (1) 求证: 数列  $\{S_n^2\}$  是等差数列, 并求出  $a_n$  的表达式;
- (2) 数列  $\{a_n\}$  中是否存在连续三项  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ , 使得  $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}} (k \in \mathbb{N}^*)$  构成等差数列? 请说明理由.

19. (12 分)

如图所示, 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ , 四边形  $ACFE$  为矩形, 且  $CF \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD = CD = BC = CF$ .

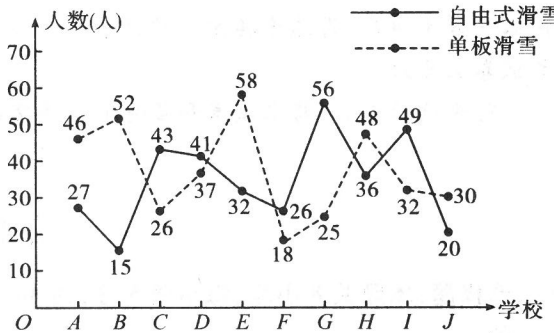
- (1) 求证:  $EF \perp$  平面  $BCF$ ;
- (2) 当点  $M$  在线段  $EF$  上运动时, 求平面  $MAB$  与平面  $FCB$  夹角的余弦值的取值范围.



20. (12 分)

2022 年冬季奥林匹克运动会在北京胜利举行, 北京也成为了第一个同时举办过夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会以及亚洲运动会三项国际赛事的城市. 为推广普及冰雪运动, 深入了解湖北某地中小学学生在“自由式滑雪”和“单板滑雪”两项活动的参与情况, 随机选取了 10 所学校进行研究, 得到如下图数据:

- (1) 在这 10 所学校中随机选取 3 所来调查研究, 求在抽到学校至少有一个参与“自由式滑雪”超过 40 人的条件下, “单板滑雪”不超过 30 人的概率;
- (2) 现在有一个“单板滑雪”集训营, 对“滑行、转弯、停止”这 3 个动作技巧进行集训, 且在集训中进行了多轮测试. 规定: 在一轮测试中, 这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”. 则该轮测试记为“优秀”, 在集训测试中, 小明同学滑行、转弯、停止三个动作达到“优秀”的概率分别为  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ , 且各个动作互不影响且每轮测试互不影响. 如果小明同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 3 次, 那么理论上至少要进行多少轮测试?



21. (12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

- (1) 若椭圆  $E$  的离心率  $e \in (0, \frac{1}{2}]$ , 求  $b$  的取值范围;
- (2) 已知椭圆  $E$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $M, N$  为椭圆  $E$  上不同两点, 若经过  $M, N$  两点的直线与圆  $x^2 + y^2 = b^2$  相切, 求线段  $MN$  的最大值.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = e^x + mx^2 - e, m \in \mathbb{R}$ . (注:  $e = 2.718\ 281 \dots$  是自然对数的底数)

- (1) 当  $m = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 若  $f(x)$  只有一个极值点, 求实数  $m$  的取值范围;
- (3) 若存在  $n \in \mathbb{R}$ , 对与任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x) \geq n$  恒成立, 求  $m - n$  的最小值.