

新高考数学 I 卷参考答案

本试卷共 4 页, 22 小题, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上. 用 2B 铅笔将试卷类型 (A) 填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N = ()$.

A: $\{-2, -1, 0, 1\}$ B: $\{0, 1, 2\}$ C: $\{-2\}$ D: 2

答案: C.

解析: 因为 $x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) \geq 0$, 所以 $N = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

又因为 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 所以 $M \cap N = \{-2\}$, 故选 C.

2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} = ()$.

A: $-i$ B: i C: 0 D: 1

答案: A.

解析: 因为 $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{1}{2}i$, $z - \bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$, 故选 A.

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$. 若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$, 则 $()$.

A: $\lambda + \mu = 1$ B: $\lambda + \mu = -1$ C: $\lambda\mu = 1$ D: $\lambda\mu = -1$

答案: D.

解析: 由题意得 $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$, $\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = (1 + \mu, 1 - \mu)$.

因为 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$, 所以 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = 0$, 即 $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$, 整理可得 $\lambda\mu = -1$, 故选 D.

4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 $()$.

A: $(-\infty, -2]$ B: $[-2, 0)$ C: $(0, 2]$ D: $[2, +\infty)$

答案: D.

解析: 因为 $y = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上是单调增函数, 所以函数 $y = x(x-a) = (x-\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减. 所以 $\frac{a}{2} \geq 1 \Rightarrow a \in [2, +\infty)$, 故选 D.

5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a = ()$.

A: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B: $\sqrt{2}$

C: $\sqrt{3}$

D: $\sqrt{6}$

答案: A.

解析: 由 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 得 $e_2^2 = 3e_1^2$, 即 $\frac{4-1}{4} = 3 \cdot \frac{a^2-1}{a^2}$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha = ()$.

A: 1

B: $\frac{\sqrt{15}}{4}$

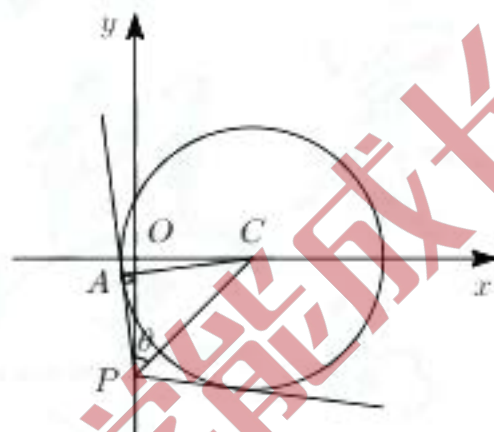
C: $\frac{\sqrt{10}}{4}$

D: $\frac{\sqrt{6}}{4}$

答案: B.

解析: 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$, 化简得 $(x-2)^2 + y^2 = 5$, 圆心为 $C(2, 0)$, $r = \sqrt{5}$.

设 $\angle CPA = \theta$, 则 $\alpha = 2\theta$.



解析图

如图, $\sin \theta = \frac{CA}{CP} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, 则 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, 所以 $\sin \alpha = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则 $()$.

A: 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B: 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C: 甲是乙的充要条件

D: 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案: C.

解法 1: a_n 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 从而可得

$$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2},$$

故 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$, 则 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件.

反之, $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)}$ 为常数, 设为 t , 即

$$\frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = t,$$

故 $S_n = na_{n+1} - t \cdot n(n+1)$, 故 $S_{n-1} = (n-1)a_n - t \cdot n(n-1)$, $n \geq 2$. 两式相减有: $a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - 2tn$, 整理即 $a_{n+1} - a_n = 2t$, 对 $n=1$ 也成立, 故 $\{a_n\}$ 为等差数列. 则甲是乙的必要条件.

故甲是乙的充要条件, 故选 C

解法 2: 因为甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 , 公差为 d . 即 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 则

$$\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2},$$

故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 即甲是乙的充分条件.

反之, 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列. 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = D$, $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)D$. 即

$$S_n = nS_1 + n(n-1)D.$$

$$S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)D.$$

当 $n \geq 2$ 时, 上两式相减得: $S_n - S_{n-1} = S_1 + 2(n-1)d$. 当 $n=1$ 时, 上式成立. 所以 $a_n = a_1 + 2(n-1)D$. 又 $a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nD - [a_1 + 2(n-1)D] = 2D$ 为常数, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列. 故选 C

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = (\quad)$.

A: $\frac{7}{9}$

B: $\frac{1}{9}$

C: $-\frac{1}{9}$

D: $-\frac{7}{9}$

答案: B.

解析: 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}$, 所以 $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2(\alpha + \beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则 ().

A: x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数

B: x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数

C: x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差

D: x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

答案: BD.

解析: 对于选项 A, 如 1、2、2、2、4 的平均数不等于 2、2、2、2 的平均数, 故错误.

对于选项 B, 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, 所以 B 正确.

对于选项 C, x_1, x_2, \dots, x_6 的数据波动性更大, 所以 C 错误.

对于选项 D, 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$, 所以 $x_5 - x_2 \leq x_6 - x_1$, 故正确.

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 p_0 ($p_0 > 0$) 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则 ().

A: $p_1 \geq p_2$

B: $p_2 > 10p_3$

C: $p_3 = 100p_0$

D: $p_1 \leq 100p_2$

答案: ACD.

解析: 燃油汽车 $L_{p_1} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} \in [60, 90]$, 所以

$$\frac{p_1}{p_0} = 10^{\frac{L_{p_1}}{20}}, L_{p_1} \in [60, 90],$$

$$\frac{p_2}{p_0} = 10^{\frac{L_{p_2}}{20}}, L_{p_2} \in [50, 60],$$

$$\frac{p_3}{p_0} = 10^{\frac{L_{p_3}}{20}} = 10^2 = 100.$$

①

②

③

对于 A 选项, 由表知 $L_{p_1} \geq L_{p_2}$, 所以 A 正确.

对于 B 选项, ② \div ③, $\frac{p_2}{p_3} = 10^{\frac{L_{p_2} - L_{p_3}}{20}} \in [10^{\frac{1}{2}}, 10^1]$, 所以 $\frac{p_2}{p_1} < 10$, 所以 B 错误.

对于 C 选项, $\frac{p_3}{p_0} = 10^{\frac{L_{p_3}}{20}} = 10^2 = 100$, 所以 C 正确.

对于 D 选项, ① \div ②, $\frac{p_1}{p_2} = 10^{\frac{L_{p_1} - L_{p_2}}{20}} \in [10^0, 10^2]$, 所以 $\frac{p_1}{p_2} \in [1, 100]$, $p_1 \leq 100p_2$, 所以 D 正确.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ().

A: $f(0) = 0$

B: $f(1) = 0$

C: $f(x)$ 是偶函数

D: $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

答案: ABC.

解析: 对于选项 A, 令 $x = 0, y = 0, f(0) = 0$, 所以 A 正确.

对于选项 B, 令 $x = 1, y = 1, f(1 \times 1) = 1^2 \times f(1) + 1^2 \times f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$, 所以 B 正确.

对于选项 C, 令 $x = -1, y = -1, f[(-1) \times (-1)] = (-1)^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times f(-1) = 2f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$;

再令 $x = -1, y = x, f[(-1) \times x] = x^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$, 所以 C 正确.

对于选项 D, 函数 $f(x) = 0$ 为常数函数, 且满足原题 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 而常数函数没有极值点, 所以 D 错误.

12. 下列物体中, 能够被整体放入棱长为 1 (单位: m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有 ().

A: 直径为 0.99 m 的球体

B: 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

C: 底面直径为 0.01 m, 高为 1.8 m 的圆柱体

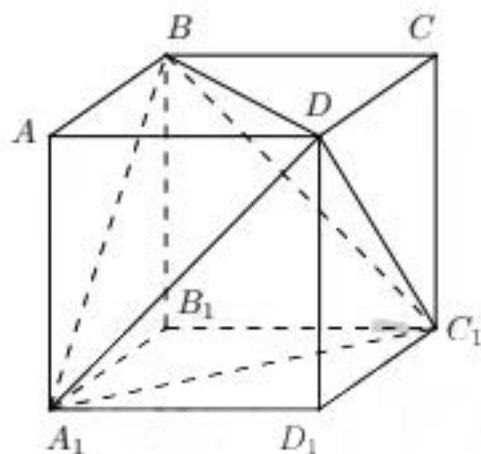
D: 底面直径为 1.2 m, 高为 0.01 m 的圆柱体

答案: ABD.

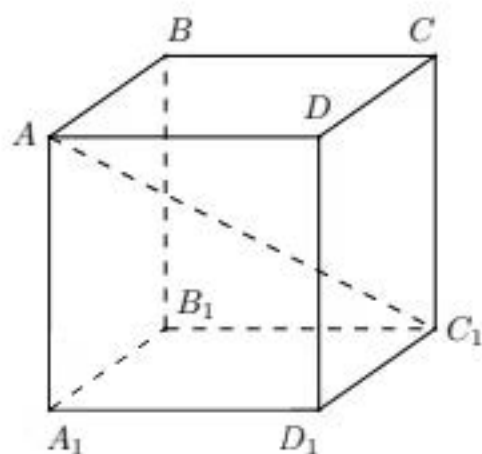
解析: 对于 A 选项, 正方体内切球直径为 1 米, 故 A 正确.

对于 B 选项, 如图 (1), 正方体内部最大的正四面体棱长为 $BA_1 = \sqrt{2}, \sqrt{2} > 1.4$, 故 B 正确.

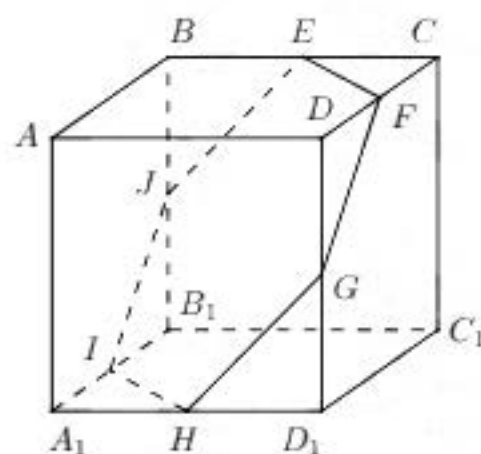
对于C选项,如图(2),底面直径为0.01米,可忽略不计,高为1.8米,可看作高为1.8米的线段,而体对角线为 $\sqrt{3} < 1.8$,故C错误.



(1)



(2)



(3)

对于D选项,如图(3),高为0.01米,可忽略不计,看作直径为1.2米的平面图. E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J 为各棱中点,六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形,其棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m, 其内切圆直径为 FH . 所以 $\angle GFH = \angle GHF = 30^\circ$, 所以 $FH = \sqrt{3}FG = \sqrt{3}GH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m, $(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 = \frac{6}{4} > (1.2)^2 = 1.44$. 所以D选项正确.

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 某学校开设了4门体育类选修课和4门艺术类选修课, 学生需从这8门课中选修2门或3门课, 并且每类选修课至少选修1门, 则不同的选课方案共有_____种(用数字作答).

答案: 64.

解析: 若选修2门课, 则需要从体育类和艺术类中各选择1门, 共有 $C_4^1 C_4^1 = 16$ 种; 若选修3门课, 则分为两种情况, 2门体育类1门艺术类或2门艺术类1门体育类, 共有 $2C_4^2 C_4^1 = 48$ 种.

故选课方法一共有 $48 + 16 = 64$ 种.

14. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $AA_1 = \sqrt{2}$, 则该棱台的体积为_____.

答案: $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

解析: 在等腰梯形 A_1C_1AC 中, $AC = 2\sqrt{2}$, $A_1C_1 = \sqrt{2}$, $AA_1 = \sqrt{2}$, 则 $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$$V = \frac{1}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})h = \frac{1}{3}(1 + 4 + \sqrt{1 \times 4}) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

15. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ ($\omega > 0$) 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有3个零点, 则 ω 的取值范围是_____.

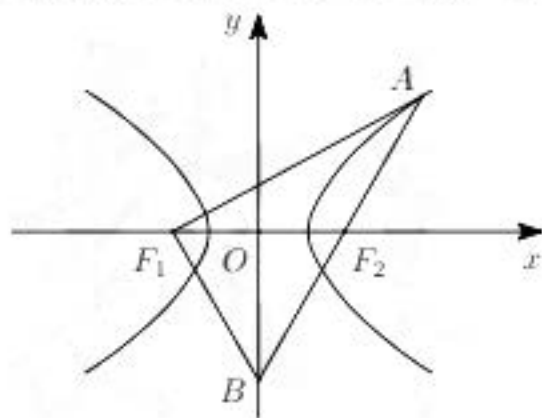
答案: $[2, 3)$.

解析: $x \in [0, 2\pi], \omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 则 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 所以 $2 \leq \omega < 3$.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}, \overrightarrow{F_2A} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

答案: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

解法 1: (坐标法) 建立如图所示坐标系, 依题意可以设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B(0, n)$.



由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 可得 $A(\frac{5}{3}c, -\frac{2}{3}n)$, 又 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, 且 $\overrightarrow{F_1A} = (\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n), \overrightarrow{F_1B} = (c, n)$, 则

$$\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = (\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n) \cdot (c, n) = \frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}n^2 = 0.$$

即 $n^2 = 4c^2$. 又点 A 在 C 上, 则 $\frac{25}{9} \frac{c^2}{a^2} - \frac{4}{9} \frac{n^2}{b^2} = 1$, 整理可得 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{4n^2}{9b^2} = 1$, 代入 $n^2 = 4c^2$, 可得 $\frac{25c^2}{a^2} - \frac{16c^2}{b^2} = 9$.
即 $25e^2 - \frac{16e^2}{e^2 - 1} = 9$, 解之得 $e^2 = \frac{9}{5}$ 或 $\frac{1}{5}$ (舍去), 故 $e = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

解法 2: (解三角形) 由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 得 $\frac{|F_2A|}{|F_2B|} = \frac{2}{3}$, 设 $|F_2A| = 2x, |F_2B| = 3x$.

由对称性可得 $|F_1B| = 3x$, 由定义可得, $|AF_1| = 2x + 2a, |AB| = 5x$, 设 $\angle F_1AF_2 = \theta$, 则 $\sin \theta = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$, 从而 $\cos \theta = \frac{4}{5} = \frac{2x + 2a}{5x}$, 解得 $x = a$, 所以 $|AF_1| = 2x + 2a, |AF_2| = 2a$.

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \theta = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{4}{5}$, 即 $5c^2 = 9a^2$, 从而可得 $e = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C, 2\sin(A - C) = \sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

解: (1) 因为 $A + B = 3C, A + B + C = \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}, B = 3C - A$.

又因为 $2\sin(A - C) = \sin B$, 所以 $2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin(\frac{3\pi}{4} - A)$, 所以

$$2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin \frac{3\pi}{4} \cos A - \cos \frac{3\pi}{4} \sin A,$$

代入数据得 $\sqrt{2}\sin A - \sqrt{2}\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$, 整理即得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos A$, 所以 $\tan A = 3$.

又因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1, 0 < A < \pi$, 所以 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

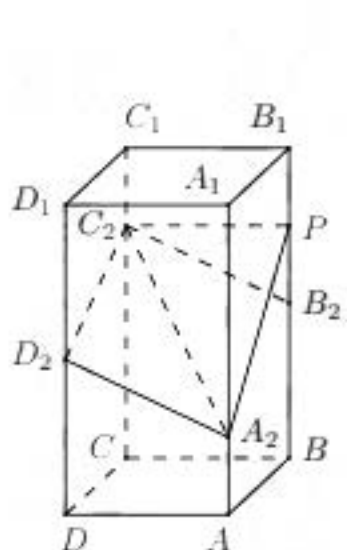
(2) 由 (1) 知 $\sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $a = 3\sqrt{5}$.
由三角形面积公式 $s = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ABh$, 解得 $h = 6$.

18. (12 分)

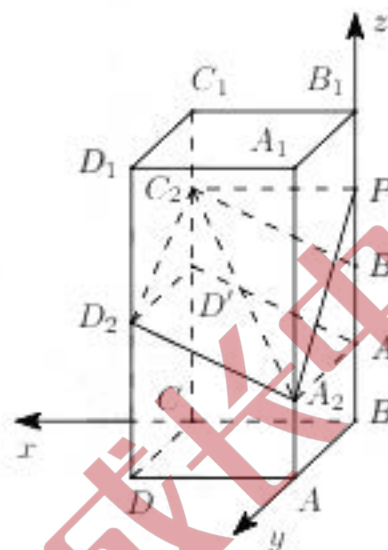
如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$.

(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .



题图



解析图

解: (1) 作 $A_2A' \perp BB_1$ 于 A' , $D_2D' \perp CC_1$ 于 D' , 则 $A_2A' \parallel D_2D'$.

在 $\square A_2D_2D'A'$ 中, $A_2D_2 \parallel A'D'$. 又 $C_2D' = B_2A' = 1$, 则 $C_2B_2 \parallel D'A' \parallel A_2D_2$, 得证!

(2) 如解析图建系, 设 $P(0, 0, h), C_2(2, 0, 3), A_2(0, 2, 1), D_2(2, 2, 2)$.

设二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 $\theta = \frac{5\pi}{6}$, $\overrightarrow{A_2D_2} = (2, 0, 1), \overrightarrow{A_2C_2} = (2, -2, 2), \overrightarrow{A_2P} = (0, -2, h-1)$.

面 $A_2D_2C_2$ 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (1, -1, -2)$, 面 A_2C_2P 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (h-3, h-1, 2)$. 则

$$|\cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(h-3)^2 + (h-1)^2 + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(h-2)^2 + 3}},$$

从而 $(h-2)^2 + 3 = 4$, 解得 $h = 1$ 或 3 . 故 $|B_2P| = |2-h| = 1$.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

解: (1) 由 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 得 $f'(x) = ae^x - 1, f''(x) = ae^x$.

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $ae^x \leq 0, f'(x) = ae^x - 1 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减.

(ii) 若 $a > 0, f''(x) = ae^x > 0$, 得 $f'(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增.

令 $f'(x) = ae^x - 1 = 0$, 则 $x = \ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

所以, 当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

(2) 由 (1) 可得, $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = -\ln a$ 时取得最小值, $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = 1 + a^2 + \ln a$.

令 $g(a) = f(-\ln a) - (2\ln a + \frac{3}{2}) = 1 + a^2 + \ln a - 2\ln a - \frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, 则

$$g'(a) = 2a - \frac{1}{a}, \quad g''(a) = 2 + \frac{1}{a^2}.$$

由 $a > 0$, 得 $g''(a) > 0$, $g'(a)$ 单调递增.

令 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = 0$, 得 $2a^2 - 1 = 0$, 从而 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负根舍去).

当 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减; 当 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增.

当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g'(a) = 0$, $g(a)$ 取得最小值, $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2} > \ln 1 = 0$.

所以 $g(a) > 0$, 则 $f(x)_{\min} > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 即 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. (12分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

解: (1) 由 $3(a_2 - a_1) = a_3 - a_1 = 2d$, 得 $a_1 = d$, 从而 $a_n = nd (d > 1)$, 故 $b_n = \frac{n+1}{d}$.

易知 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 6d, T_3 = \frac{2+3+4}{d} = \frac{9}{d}$.

由题意得 $6d + \frac{9}{d} = 21$, 从而 $2d^2 - 7d + 3 = 0$, 整理即 $(2d-1)(d-3) = 0$, 故 $d = 3, a_n = 3n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 设公差为 r , 则 $\frac{n(n+1)}{a_0 + nd} = b_0 + nr$, 从而

$$n^2 + n = (a_0 + nd)(b_0 + nr) = drn^2 + (db_0 + ra_0)n + a_0b_0.$$

$$\text{故 } \begin{cases} dr = 1, \\ db_0 + ra_0 = 1, \\ a_0b_0 = 0 \end{cases} \quad (d > 1 \Rightarrow 0 < r < 1).$$

$$S_{99} - T_{99} = \sum_{n=1}^{99} (a_0 + nd - b_0 - nr) = 99(a_0 - b_0) + \frac{99 \times 100}{2}(d - r) = 99 \Rightarrow a_0 - b_0 + 50(d - r) = 1.$$

① $a_0 = 0$ 时, $db_0 = 1, dr = 1$.

$$\begin{aligned} 50(d - r) = 1 + b_0 &\Rightarrow 50(d - \frac{1}{d}) = 1 + \frac{1}{d} \Rightarrow 50d^2 - d - 51 = 0 \\ &\Rightarrow (50d - 51)(d + 1) = 0 \Rightarrow d = \frac{51}{50}. \end{aligned}$$

② $b_0 = 0$ 时, $ra_0 = 1, dr = 1$,

$$\begin{aligned} a_0 + 50(d - r) = 1 &\Rightarrow \frac{1}{r} + 50(\frac{1}{r} - r) = 1 \Rightarrow 50r^2 + r - 51 = 0 \\ &\Rightarrow (50r + 51)(r - 1) = 0 \Rightarrow r = d = 1. \text{ 矛盾!} \end{aligned}$$

综上, $d = \frac{51}{50}$.

21. (12分)

甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i.$$

记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

解: (1) $P(\text{乙}) = P(\text{甲乙}) + P(\text{乙乙}) = \frac{1}{2} \times 0.4 + \frac{1}{2} \times 0.8 = 0.6$.

(2) 第 i 次是乙投的概率为 $(1 - p_i)$, $p_1 = \frac{1}{2}$ 且

$$p_{i+1} = p_i \times 0.6 + (1 - p_i) \times 0.2 = 0.2 + 0.4p_i.$$

则 $p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}p_i + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}(p_i - \frac{1}{3})$, 故 $p_i - \frac{1}{3} = (\frac{2}{5})^{i-1}(p_1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6} \times (\frac{2}{5})^{i-1}$, 从而 $p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(\frac{2}{5})^{i-1}, i \in \mathbf{N}^*$.

(3) ① $n \geq 1$ 时,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (\frac{2}{5})^{i-1} + \frac{n}{3} = \frac{1}{6} \frac{1 - (\frac{2}{5})^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} [1 - (\frac{2}{5})^n] + \frac{n}{3}, n \in \mathbf{N}^*.$$

② $n = 0$ 时,

$$E(Y) = 0 = \frac{5}{18} [1 - (\frac{2}{5})^0] + \frac{0}{3}.$$

综上, $E(Y) = \frac{5}{18} [1 - (\frac{2}{5})^n] + \frac{n}{3}, n \in \mathbf{N}$.

22. (12分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

解: (1) 设点 $P(x, y)$.

由题意得 $\sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = |y|$, 平方得 $x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} = y^2$, 于是 $y = x^2 + \frac{1}{4}$, 经验证成立.

故 W 的方程为 $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

(2) 方法一: 不妨设 A, B, C 三点在 W 上, 且 $AB \perp BC$.

设 $A(a, a^2 + \frac{1}{4}), B(b, b^2 + \frac{1}{4}), C(c, c^2 + \frac{1}{4})$, 则 $\overrightarrow{AB} = (b - a, b^2 - a^2), \overrightarrow{BC} = (c - b, c^2 - b^2)$.

由题意, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 即 $(b - a)(c - b) + (b^2 - a^2)(c^2 - b^2) = 0$.

显然 $(b - a)(c - b) \neq 0$, 于是 $1 + (b + a)(c + b) = 0$. 此时, $|b + a| \cdot |c + b| = 1$.

于是 $\min\{|b + a|, |c + b|\} \leq 1$.

不妨设 $|c+b| \leq 1$, 则 $a = -b - \frac{1}{b+c}$.

$$\begin{aligned} AB+BC &= |b-a|\sqrt{1+(a+b)^2} + |c-b|\sqrt{1+(c+b)^2} \\ &= |b-a|\sqrt{1+\frac{1}{(c+b)^2}} + |c-b|\sqrt{1+(c+b)^2} \\ &\geq |b-a|\sqrt{1+(c+b)^2} + |c-b|\sqrt{1+(c+b)^2} \\ &\geq |c-a|\sqrt{1+(c+b)^2} \\ &= |b+c+\frac{1}{b+c}|\sqrt{1+(c+b)^2}. \end{aligned}$$

设 $x = |b+c|$, $f(x) = (x + \frac{1}{x})\sqrt{1+x^2}$, 则 $f(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x^2) - (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 1 - x^2)}{x^2} = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x^2 - 1)}{x^2}.$$

显然, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 为最小值点. 故 $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 而矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC) \geq 2f(x) \geq 3\sqrt{3}$.

注意这里有两个取等条件, 一个是 $|b+c| = 1$, 另一个是 $|b+c| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 这显然是无法同时取到的, 所以等号不成立, 命题得证.

方法二: 不妨设 A, B, D 在抛物线 W 上, C 不在抛物线 W 上, 欲证命题为 $|AB| + |AD| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

不影响问题的证明, 可以将抛物线 W 看作 $y = x^2$, 设 $A(a, a^2)$ ($a \geq 0$), 平移坐标系使 A 为坐标原点, 则新抛物线方程为 $y' = x'^2 + 2ax'$, 写为极坐标方程, 为 $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta + 2a\rho \cos \theta$, 即 $\rho = \frac{\sin \theta - 2a \cos \theta}{\cos^2 \theta}$.

欲证明结论为 $|\frac{\sin \theta - 2a \cos \theta}{\cos^2 \theta}| + |\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) - 2a \cos(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{2})}| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 也即

$$|\frac{2}{\cos \theta} \cdot a - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}| + |\frac{2}{\sin \theta} \cdot a + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

不妨设 $|\frac{2}{\cos \theta}| \geq |\frac{2}{\sin \theta}|$, 将不等式左边看成关于 a 的函数, 根据绝对值函数的性质, 其最小值当

$$\frac{2}{\cos \theta} \cdot a - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0 \iff a = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}$$

时取得, 因此欲证不等式及

$$|\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \iff |\frac{1}{\cos \theta \sin^2 \theta}| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

根据均值不等式, 有

$$|\cos \theta \sin^2 \theta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) (1 - \cos^2 \theta)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\frac{2}{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

等号当 $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$ 时取得, 因此原命题得证.